ある探索問題における諸費用について (不確実・不確定性下での意思決定過程)

菊田, 健作

数理解析研究所講究録
第 1682 巻 2010 年 151-155

ある探索問題における諸費用について

兵庫県立大学・経営学部　菊田健作 (KIKUTA Kensaku)
School of Business Administration
University of Hyogo

1. はじめに

ここでは次のような探索ゲームを考える。1個の静止目標物が連結な有限グラフ上のノードのどれかに意志をもって隠れる。このとき、静止目標物を hider と呼ぶ。探索者はグラフの辺上を移動しながら目標物を探す。探索者がノードを調べるときに調査費用が、また辺上を移動するときに移動費用が発生する。探索者は、総費用が小さくなるようにノードの探索順序を決めねばならない。調査費用と移動費用があるので、探索者は次のようなことを検討せねばならない。あるノードに来たとき、そこを調べてから次のノードに移動するのかそれとも調べずに移動するのか。調査費用が大きいならばそこを調べるのは後回しにした方が期待総費用は小さくなるかもしれない。一方、調査費用が大きいノードに目標物があるかもしれない。また、移動費用も考えねばならない。事前に探索順序を決めねばならないモデルであるので、探索者の順序付け問題とも考えることができる。

文献 [4] では、Cyclic グラフ上で、ノードの調査費用が２個のパラメータで与えられるような場合の探索者および hider の最適戦略を与えた。文献 [6] では、調査費用は２つ、移動費用は３つの値のうちのいずれかしか取り得ないようなモデルで完全グラフの場合に、探索者および hider の最適戦略を求めることを検討した。一方、文献 [5] では、調査費用は２つ、移動費用は３つの値のうちのいずれかしか取り得ないような場合で、目標物の存在確率が与えられている最適化問題の解析を行っている。また文献 [1] の 97 頁において調査費用に関するコメントが与えられている。関係する文献として [1],[2],[3],[7],[8] がある。

このモデルでは、移動費用と調査費用が最適戦略にどのように影響を与えるかを解明するのが一つの課題である。第３節では文献 [4] に基づいて Cyclic グラフ上のゲームの解析の現状を述べる。第４節では車輪型グラフまたはそれに近いようなグラフにおいてノード数が 4 の場合をゲームが解ける例として与える。ただし、移動費用は 1 としている。したがって、調査費用のみに注目していることになる。第５節で検討課題を述べている。

2. グラフ上の探索ゲーム

本節では、移動費用、調査費用を考慮した探索ゲームモデルを与える。まず、(N, E) を連結

な無向有限グラフとする。ここに $N = \{0, 1, \ldots, n\}, n \geq 2$, はノードの集合、$E \subseteq N \times N$ は辺の集合である。hider は N に含まれる 0 以外のノードのどれか 1 つを選びそこに隠れる。探索者はノード 0 から出発して、辺上を移動しつつノードを 1 つずつ調べていく。見逃し確率はどのノードについても 0 である。ノード $i \in N \setminus \{0\}$ を調べる費用は c_i である。$(i, j) \in E$ のとき、ノード i から j への移動費用は $d(i, j) > 0$ であるとする。$(i, j) \notin E$ のときは、i と j を結ぶ路に関する移動費用を考えその最小値を $d(i, j)$ とする。すべての $i, j \in N$ に対し $d(i, j) = d(j, i)$ とする。hider の（純粋）戦略はノード $i \in N \setminus \{0\}$ を選ぶことである。hider の戦略全体の集合は $N \setminus \{0\}$ である。探索者の（純粋）戦略は、探索を開始する前に探索の順序 σ を決定することである。ここに σ は集合 N 上の置換であり $\sigma(0) = 0$ を満たす。$\sigma = [\sigma(1), \ldots, \sigma(n)]$ と表すとき、探索者が $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ の順にノードを調べることを意味する。このような置換全体の集合を Σ と表す。hider が戦略 $i \in N \setminus \{0\}$ をとり、探索者が戦略 $\sigma \in \Sigma$ をとったとき、ノード i において目標物を見つけるまでにかかる費用は

$$f(i, \sigma) = \sum_{x=0}^{\sigma^{-1}(i)-1} \{d(\sigma(x+1), \sigma(x)) + c_{\sigma(x+1)}\}.$$

hider の利得を $f(i, \sigma)$、探索者の利得を $-f(i, \sigma)$ として、有限２人ゼロ和ゲーム $(f, N \setminus \{0\}, \Sigma)$ を得る。これの混合拡大を (f, P, Q) と表す。P と Q の要素をそれぞれ p と q とすると、

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \geq 0, \forall i \in N \setminus \{0\}, \sum_{\sigma \in \Sigma} q_\sigma = 1, \forall \sigma \in \Sigma$$

ここに、$p_i, i \in N \setminus \{0\}$, は目標物がノード i にある確率、 $q_\sigma, \sigma \in \Sigma$, は探索者が順序 σ を選ぶ確率である。$p \in P$ と $q \in Q$ のときの期待費用は

$$f(p, q) = \sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{\sigma \in \Sigma} p_i q_\sigma f(i, \sigma).$$

ゲームの値を $v(N, E)$ で表すことにする。 以降はすべての $i, j, i \neq j$ に対し $d(i, j) = 1$ を仮定する。

3. Cyclic グラフ上のゲーム

辺集合が $E = \{(i, i+1) : 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{(0, n)\} \subset N \times N$ の場合である。

定理 ([4]). ある $k > 0$ とすべての $i \in N \setminus \{0\}$ に対して、$1 + c_i = k^{i-1}(1 + c_1)$ を仮定する。このときゲームの値は $\frac{1+c_1}{1+k} \sum_{x=1}^{n+1} k^{x-1}$ である。探索者の 1 つの最適戦略は順序 $[1, 2, \ldots, n]$ とその逆順とをそれぞれ確率 $\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1}$ で選ぶことである。hider の 1 つの最適戦略はノード $i \in N \setminus \{0\}$ に確率 $\frac{k^{i-1}}{\sum_{x=1}^{n} k^{x-1}}$ で隠れることである。

第 1 節で述べたように、この定理においては調査費用は k と c_1 のみで表されると仮定している。文献 [4] ではさらに $n=3$ の場合にこの仮定なしでゲームが解かれている。そこでの結果と第 4 節で与えられる例を比較検討するのは今後の課題である。

4. 車輪型に関連したグラフ上のゲーム

グラフの辺の集合 $E = E_S \equiv \{(0,i) : i \in S\} \cup \{(i,i+1) : 1 \le i \le n-1\} \cup \{(1,n)\}$ の場合である。ここに、$S \subseteq N \setminus \{0\}, S \neq \emptyset$ とする。$S = N \setminus \{0\}$ とすると車輪型になる。本節では $n=3$ の場合を調べる。hider の戦略全体の集合は $N \setminus \{0\} = \{1,2,3\}$、一方、探索者の戦略全体の集合は $\Sigma = \{[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]\}$ である。$i = 1,2,3$ に対し、$b(i) \equiv 1 + c_i$ とおく。また、すべての $i,j,i \neq j$ に対し、$b(ij) \equiv b(i) + b(j)$ とする。$b(123) \equiv b(1) + b(2) + b(3)$ とする。以下の 4.1-4.3 節で述べられていることは次のようにして示せばよい。各 $S = \{1,2,3\}, \{1,2\}$ および $\{1\}$ に対して

$$f(p^*, \sigma) \ge v(N, E_S), \forall \sigma \in \Sigma$$

および

$$\exists q \in Q \text{ such that } f(i,q) = v(N, E_S), \forall i \in N \setminus \{0\}.$$

4.1. グラフ $(N, E_{\{1,2,3\}})$ 上のゲーム

ゲームは次の行列で表される、ここに、行列の各成分は $f(i,\sigma), i = 1,2,3, \sigma \in \Sigma$ である:

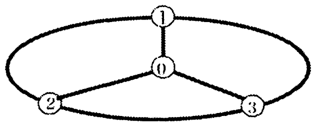

Figure 1: Graph $(N, E_{\{1,2,3\}})$

Table 1

	[1, 2, 3]	[1, 3, 2]	[2, 1, 3]	[2, 3, 1]	[3, 1, 2]	[3, 2, 1]
1	$b(1)$	$b(1)$	$b(12)$	$b(123)$	$b(23)$	$b(123)$
2	$b(12)$	$b(123)$	$b(2)$	$b(2)$	$b(123)$	$b(23)$
3	$b(123)$	$b(13)$	$b(123)$	$b(23)$	$b(3)$	$b(3)$

hider の一つの最適戦略は

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*), p_i^* = \frac{b(i)}{b(123)}, i = 1,2,3.$$

ゲームの値 $v(N, E_{\{1,2,3\}})$ は

$$v(N, E_{\{1,2,3\}}) = \frac{b(1)^2 + b(2)^2 + b(3)^2 + b(1)b(2) + b(2)b(3) + b(3)b(1)}{b(123)}.$$

探索者の最適戦略は任意の $i = 1, 2, 3$ に対し $f(i, q) = v(N, E_{\{1,2,3\}})$ を満たすすべての $q \in Q$ である。なお、この結果は一般の n の場合に容易に拡張されることが予想される。

4.2. グラフ $(N, E_{\{1,2\}})$ 上のゲーム

ゲームは次の行列で表される:

Table 2

	[1, 2, 3]	[1, 3, 2]	[2, 1, 3]	[2, 3, 1]	[3, 1, 2]	[3, 2, 1]
1	$b(1)$	$b(1)$	$b(12)$	$b(123)$	$1 + b(23)$	$1 + b(123)$
2	$b(12)$	$b(123)$	$b(2)$	$b(2)$	$1 + b(123)$	$1 + b(23)$
3	$b(123)$	$b(13)$	$b(123)$	$b(23)$	$1 + b(3)$	$1 + b(3)$

費用 $b(1), b(2), b(3)$ がある関係を満たすときは、ゲームの解は次の通りである。hider の一つの最適戦略は

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*), p_i^* = \frac{b(i)}{b(123)}, i = 1, 2, 3,$$

で与えられる。ゲームの値は $v(N, E_{\{1,2\}}) = v(N, E_{\{1,2,3\}})$ である。探索者の最適戦略は任意の $i = 1, 2, 3$ に対し $f(i, q) = v(N, E_{\{1,2,3\}})$ および $q_{[3,1,2]} = q_{[3,2,1]} = 0$ を満たすすべての $q \in Q$ である。

4.3. グラフ $(N, E_{\{1\}})$ 上のゲーム

ゲームは次の行列で表される:

Table 3

	[1, 2, 3]	[1, 3, 2]	[2, 1, 3]	[2, 3, 1]	[3, 1, 2]	[3, 2, 1]
1	$b(1)$	$b(1)$	$1 + b(12)$	$1 + b(123)$	$1 + b(23)$	$1 + b(123)$
2	$b(12)$	$b(123)$	$1 + b(2)$	$1 + b(2)$	$1 + b(123)$	$1 + b(23)$
3	$b(123)$	$b(13)$	$1 + b(123)$	$1 + b(23)$	$1 + b(3)$	$1 + b(3)$

費用 $b(1), b(2), b(3)$ がある関係を満たすときは、ゲームの解は次の通りである。hider の一つの最適戦略は

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*), p_1^* = \frac{b(1) - 1}{b(123)}, p_2^* = \frac{\{1 + b(23)\}b(2)}{b(23)b(123)}, p_3^* = \frac{\{1 + b(23)\}b(3)}{b(23)b(123)}.$$

ゲームの値は

$$v(N, E_{\{1\}}) = b(1) + \frac{1 + b(23)}{b(23)b(123)}\{b(2)^2 + b(3)^2 + b(2)b(3)\}.$$

探索者の最適戦略は任意の $i = 1, 2, 3$ に対し $f(i, q) = v(N, E_{\{1\}})$ を満たしかつ $q_{[3,1,2]} = q_{[2,1,3]} = 0$ を満たすすべての $q \in Q$ である。

5. おわりに

例えば、移動費用や調査費用がそれぞれ辺およびノードに依存せずに一定であるならば、グラフが木の場合や Cyclic の場合は最適戦略が得られる。しかし、グラフがサイクルを２個以上持つ場合にはさらなる解析が必要である。当面は次のことが検討課題である。

（１）車輪型に関連したグラフ上のモデルにおいて $n \geq 4$ の場合を解析すること。
（２）車輪型に関連したグラフ上のモデルにおいて調査費用は２つの値のうちのいずれかしか取り得ないような場合を解析すること。
（３）探索者が任意のノードから探索を開始できる場合、つまりノード0がないようなモデルとの最適戦略の比較検討。

参考文献

[1]Alpern,S. and Gal,S. (2003) *The theory of search games and rendezvous.* Kluwer's INTERNATIONAL SERIES. esp. pp.95-97.

[2] A.Y. Garnaev (2000) *Search games and other applications of game theory.* Springer. Berlin.

[3] 飯田耕司・宝崎隆祐 (2003) 捜索理論、三恵社.

[4] Kikuta,K. (2004) A search game on a cyclic graph. *Naval Res.Logist.* 51: 977-993.

[5] Kikuta,K. (2009) Search problem with two levels of examination costs. *Scientiae Mathematicae Japonicae* **69**: 89-100.

[6] Kikuta,K. (2009) Search game with high-low inspection costs. mimeo.

[7] 中井暉久 (1986) 探索理論展望. *mimeo* .

[8] W.H.Ruckle (1983) *Geometric games and their applications.* Pitman,Boston.MA